Tema 12: Teorema de Banach-Steinhaus

24 de junio de 2010

Principio de Acotación Uniforme

Tipos de acotación

$X \neq \emptyset$, $E \subset \mathbb{R}^X$ familia de funciones de X en $\mathbb{R}$

- E acotada en $x_0 \in X$: $\sup\{|f(x_0)| : f \in E\} < \infty$
- E puntualmente acotada: $\sup\{|f(x)| : f \in E\} < \infty \quad \forall x \in X$
- E uniformemente acotada en $B \subset X$: $\sup\{|f(x)| : f \in E,\ x \in B\} < \infty$

Principio de acotación uniforme

X espacio topológico de 2^a categoría en sí mismo

$\mathcal{F}$ familia de funciones continuas de X en $\mathbb{R}$

$$\mathcal{F} \text{ puntualmente acotada}$$
$$\Downarrow$$
$$\mathcal{F} \text{ uniformemente acotada en un abierto no vacío } B \subset X$$

Basta considerar: $F_n = \{x \in X : |f(x)| \leqslant n \quad \forall f \in E\} \qquad (n \in \mathbb{N})$

Lema de Baire: $\Longrightarrow$ Como X se puede tomar cualquier subconjunto abierto de un espacio métrico completo

Teorema de Banach-Steinhaus

Acotación para familias de operadores

X, Y espacios normados, $E \subset L(X,Y)$ familia de operadores lineales continuos

- E acotada en $x_0 \in X$: $\sup\{\|T x_0\| : T \in E\} < \infty$
- E puntualmente acotada: $\sup\{\|T x\| : T \in E\} < \infty \quad \forall x \in X$
- E uniformemente acotada en $B \subset X$: $\sup\{|f(x)| : f \in E,\ x \in B\} < \infty$
- E uniformemente acotada en la bola unidad: $\sup\{\|T\| : T \in E\} < \infty$

Teorema de Banach-Steinhaus

X espacio de Banach, Y espacio normado, $E \subset L(X,Y)$

$A = \big\{x \in X : \sup\{\|T x\| : T \in E\} < \infty\big\}$. Son equivalentes:

(a) A es de 2^a categoría en X

(b) $A = X$, es decir, E está puntualmente acotada:
$$\sup\{\|T x\| : T \in E\} < \infty \quad \forall x \in X$$

(c) E está acotada en norma:
$$\sup\{\|T\| : T \in E\} < \infty$$

Primeras aplicaciones

Teorema de cierre de Steinhaus

X espacio de Banach, Y espacio normado, $\{T_n : n \in \mathbb{N}\} \subset L(X,Y)$ sucesión de operadores lineales continuos.

Supongamos que $\{T_n\}$ converge puntualmente en X:

$$\{T_n x\} \to T x \quad \forall x \in X$$

Entonces $T \in L(X,Y)$

Caracterización dual de la acotación

X espacio normado, $E \subset X$

$$E \text{ acotado} \iff f(E) \text{ acotado} \quad \forall f \in X^*$$

Explícitamente:

$$\sup\{\|x\| : x \in E\} < \infty \iff \sup\{|f(x)| : x \in E\} < \infty \quad \forall f \in X^*$$

Espacios de Banach para el estudio de Series de Fourier

Funciones en la circunferencia y funciones periódicas

$$\mathbb{T} = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\} = \{e^{it} : t \in \mathbb{R}\}$$

Función definida en la circunferencia $g : \mathbb{T} \to \mathbb{C}$

$$f(t) = g(e^{it}) \quad \downdownarrows \qquad\qquad \upuparrows \quad g(z) = f(\operatorname{Arg} z)$$

Función 2π-periódica $f\mathbb{R} \to \mathbb{C}$

Medida de Lebesgue normalizada en la circunferencia

$$\phi :]-\pi, \pi] \to \mathbb{T} \quad \phi(t) = e^{it} \quad \forall t \in]-\pi, \pi] \quad \text{biyectiva}$$

$$E \subset \mathbb{T} \text{ medible} \iff \phi^{-1}(E) \text{ medible-Lebesgue en } \mathbb{R}$$

$$m(E) := \frac{1}{2\pi} \lambda\big(\phi^{-1}(E)\big)$$

$$L_p(\mathbb{T}) = L_p(m) \qquad (1 \leqslant p \leqslant \infty)$$

Espacios $L_p(\mathbb{T})$

- $L_p(\mathbb{T})$ $(1 \leqslant p < \infty)$ "Funciones" medibles $g : \mathbb{T} \to \mathbb{C}$ tales que

$$\|g\|_p : \left(\int_{\mathbb{T}} |g(z)|^p \, dm(z) \right)^{1/p} < \infty$$

  o bien, "funciones" medibles 2π-periódicas $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ tales que

$$\|f\|_p := \left(\frac{1}{2\pi} \int_{\pi}^{\pi} |f(t)|^p \, dt \right)^{1/p} < \infty$$

- $L_\infty(\mathbb{T})$. "Funciones" medibles y esencialmente acotadas $g : \mathbb{T} \to \mathbb{C}$, o bien, "funciones" medibles, 2π-periódicas y esencialmente acotadas $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$.

$$\|g\|_\infty = \text{ess sup}\,|g| = \text{ess sup}\,|f| = \|f\|_\infty \quad \big(g \equiv f \in L_\infty(\mathbb{T})\big)$$

- $C(\mathbb{T})$. Funciones continuas $g : \mathbb{T} \to \mathbb{C}$, o bien, funciones continuas y 2π-periódicas $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ con

$$\|g\|_\infty = \text{máx}\,\{|g(z)| : z \in \mathbb{T}\} = \text{máx}\,\{|f(t)| : t \in \mathbb{R}\} \quad \big(g \equiv f \in C(\mathbb{T})\big)$$

Espacios de Banach para el estudio de Series de Fourier

Relación entre los espacios $L_p(\mathbb{T})$

Para $1 \leqslant p \leqslant q \leqslant \infty$ se tiene

$$C(\mathbb{T}) \subset L_\infty(\mathbb{T}) \subset L_q(\mathbb{T}) \subset L_p(\mathbb{T}) \subset L_1(\mathbb{T})$$

El operador $Id : L_q(\mathbb{T}) \to L_p(\mathbb{T})$ es lineal y continuo, de hecho

$$\|g\|_p \leqslant \|g\|_q \quad \forall g \in L_q(\mathbb{T})$$

pero no es un monomorfismo:

$$\text{Lusin} \implies \overline{C(\mathbb{T})} = L_p(\mathbb{T}) \quad (1 \leqslant p < \infty)$$

Series de Fourier

$f \equiv g \in L_1(\mathbb{T})$. Coeficientes de Fourier de f:

$$\widehat{f}(n) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\, e^{-int}\, dt = \int_{\mathbb{T}} g(z)\, z^{-n}\, dm(z) \qquad (n \in \mathbb{Z})$$

Serie de Fourier de f: $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{Z}} \widehat{f}(n)\, e^{int} \quad \equiv \quad \sum_{n\in\mathbb{Z}} \widehat{f}(n)\, z^n$

Convergencia de series de Fourier

Planteamiento general

$f \in L_1(\mathbb{T})$. Sucesión de sumas parciales de la serie de Fourier de f:

$$S_n(f,t) = \sum_{k=-n}^{n} \widehat{f}(n)\, e^{ikt} \qquad (t \in \mathbb{R},\ n = 0, 1, 2, \ldots)$$

Problema: ¿ $\{S_n(f,\cdot)\} \to f$? ¿Cuándo y en qué sentido podemos decir que la serie de Fourier de una función converge a dicha función?

Convergencia en norma

Riesz: $1 < p < \infty,\ f \in L_p(\mathbb{T}) \implies \{S_n(f,\cdot)\} \to f$ en $L_p(\mathbb{T})$:

$$\lim_{n\to\infty} \int_{-\pi}^{\pi} |S_n(f,t) - f(t)|^p\, dt = 0$$

Convergencia puntual

Para $f \in C(\mathbb{T})$ tiene sentido preguntar:

$$¿\ \{S_n(f,t)\} \to f(t) \quad \forall t \in \mathbb{R}\ ?$$

La respuesta es negativa (DuBois-Reymond) pero no es fácil dar ejemplos

Punto de vista “funcional”

Para $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ fijo, tenemos:

$$S_n(f,0) = \sum_{k=-n}^{n} \widehat{f}(k) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \left(\sum_{k=-n}^{n} e^{-ikt} \right) dt$$
$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\, D_n(t)\, dt = \varphi_n(f)$$

Recordemos: $L_1(\mathbb{T}) \subset M(\mathbb{T}) \equiv C(\mathbb{T})^*$

Luego $\varphi_n \in C(\mathbb{T})^*$ con $\|\varphi_n\| = \|D_n\|_1$

Ahora un poco de cálculo:

$$D_n(t) = \sum_{k=-n}^{n} e^{-ikt} = \frac{\operatorname{sen}\big((2n+1)t/2\big)}{\operatorname{sen}(t/2)} \quad (0 < |t| \leqslant \pi) \quad D_n(0) = 2n+1$$

y se comprueba sin mucha dificultad que $\{\|D_n\|_1\} \to +\infty$

Lo que hizo famoso al Teorema de Banach-Steinhaus

Aplicación a las series de Fourier

El conjunto de las funciones $f \in C(\mathbb{T})$ tales que la sucesión $\{S_n(f,0)\}$ está acotada es de 1^a categoría en $C(\mathbb{T})$. Así pues, la convergencia puntual de la serie de Fourier de una función continua es "atípica"